МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

Т. Б. Воронкова, О. О. Воронков

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи
з курсу

«МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»

(для студентів 3 курсу заочної форми навчання та другої вищої освіти ФПО та ЗН напряму підготовки 0502 (6.030601) «Менеджмент» спеціальності «Менеджмент організацій», спеціалізації «Інформаційні системи в менеджменті»)

Харків ХНАМГ 2010

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з курсу «Математичне програмування» (для студ. 3 курсу заочної форми навчання та другої вищої освіти ФПО та ЗН напряму підготовки 0502 (6.030601) «Менеджмент» спеціальності «Менеджмент організацій», спеціалізації «Інформаційні системи в менеджменті») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Т. Б. Воронкова, О. О. Воронков – Х.: ХНАМГ, 2010.- 20 с.

Укладачі : ст.викл. Т. Б. Воронкова,
ас. О. О. Воронков

Рекомендовано кафедрою інформаційних систем і технологій в міському господарстві, протокол № 61 від 17.11.09 р.

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Вивчення дисципліни «Математичне програмування» передбачено освітньо-професійною програмою підготовки бакалавра за напрямком «Менеджмент». Зміст дисципліни ґрунтується на необхідності підготовки фахівців, які мають теоретичну базу та практичні навички з використання математичних методів обґрунтування рішень в управлінні економічними системами.

У процесі вивчення дисципліни «Математичне програмування» студент повинен виконати контрольну роботу, яка полягає у розв’язанні задачі на тему «Лінійне програмування». Пропонована задача є найпростішою задачею виробничого планування. При розв’язанні задачі треба застосувати два методи - геометричний і симплексний, скласти двоїсту задачу і знайти двоїсті оцінки ресурсів, використовуючи останню симплексну таблицю прямої задачі. Надати економічну інтерпретацію елементам розв’язків прямої та двоїстої задач та оцінити стійкість оптимального плану.

У методичних вказівках наведено основні теоретичні положення і розглянуті на прикладах етапи розв’язання найпростішої задачі виробничого планування.

Номер варіанта контрольної роботи треба вибирати за двома останніми цифрами номера залікової книжки студента. Усього варіантів - 25. Якщо дві останні цифри залікової книжки перевищують число 25, то номер варіанта визначають шляхом віднімання числа 25, 50 або 75. Наприклад, номеру залікової книжки, що закінчується цифрами 84, відповідає варіант 9. Контрольна робота повинна бути виконана в термін, призначений навчальним графіком. У кінці роботи необхідно навести літературу, якою студент користувався при розв’язанні завдання.

На титульному аркуші треба чітко написати назву дисципліни, варіант завдання, прізвище, ім’я та по батькові студента, вказати курс, спеціальність і факультет.

ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЗЛП

Нагадаємо визначення:

Функція

$$L = \Sigma c_j x_j \tag{1}$$

називається цільовою функцією (або лінійною формою) задачі лінійного програмування (ЗЛП), а умови

$$\Sigma a_{ij} x_j \le b_i; \quad (i=1,m; j=1,n), \qquad x_j \ge 0 \tag{2}$$

-- обмеженнями задачі лінійного програмування.

Загальною задачею лінійного програмування називається задача, що полягає у визначенні мінімальної або максимальної величини функції (1) при виконанні умов (2).

Розглянемо приклад.

Приклад 1. Для виготовлення двох видів виробів А і В використовують три види сировини. На виробництво одиниці виробу А потрібно витратити сировини першого типу *4 од.*, другого – *3 од.* і третього - *3 од.* На виробництво одиниці виробу В потрібно витратити сировини першого типу *3 од.*, другого – *4 од.* і третього – *5 од*. Виробництво забезпечене сировиною першого типу в кількості *440 од.*, другого – *393 од.*, третього – *450 од*. Дохід від реалізації одиниці готового виробу *А* дорівнює *6 грош.од.*, виробу *В – 5 грош.од*.

Скласти план виробництва виробів так, щоб дістати найбільший дохід від реалізації виробів.

Умову задачі зведемо в таблицю.

Сировина	*А*	*В*	*Запаси*
S_1	4	3	440
S_2	3	4	393
S_3	3	5	450

Позначимо число виробів *А*, яке необхідно виготовити, $\boldsymbol{x_1}$, а виробів *В* – $\boldsymbol{x_2}$. Очевидно, що запаси сировини обмежені нерівностями

$$4x_1+3x_2 \le 440$$
$$3x_1+4x_2 \le 393$$
$$3x_1+5x_2 \le 450.$$

Дохід від реалізації виробів *А* і *В* визначиться виразом

$$L = 6x_1 + 5x_2 \Rightarrow max.$$

Таким чином, треба знайти такі $\boldsymbol{x_1}$ і $\boldsymbol{x_2}$, які задовольняють нерівностям і перетворюють у максимум цільову функцію $\boldsymbol{L}$.

Будемо зображувати пару значень змінних точкою з координатами x_1, x_2 (рис. 1). Оскільки змінні x_1, x_2 повинні бути не меншими за нуль, припустимі їхні значення лежать тільки вище осі Ox_1, (на якій $x_2 = 0$) і правіше осі Ox_2 (на якій $x_1 = 0$). Це відзначимо штрихуванням, що позначає «припустиму» сторону кожної осі.

Тепер побудуємо на площині $x_1 0 x_2$ область припустимих рішень або переконаємося, що її не існує. Рішенням кожної нерівності є напівплощина, що обмежує область припустимих рішень задачі. Покладемо в першому рівнянні $x_1 = 0$, отримаємо рівняння прямої лінії, перша точка якої

$\boldsymbol{3x_2 = 440, \quad x_2 = 440/3 = 147}$ має координати (0, 147),

друга точка $\boldsymbol{4x_1 = 440, x_1 = 440 / 4 = 110}$ має координати (110, 0).

Аналогічно отримаємо координати точок для другого обмеження (131, 0) і (0; 98,25) і для третього обмеження (150, 0) і (0, 90).

Отримана область є областю припустимих рішень, тобто будь-яка точка області задовольняє нерівностям-умовам, і називається *припустимим планом*. Зазначимо, що цих рішень - нескінченна множина, тому що будь-яка пара значень вільних перемінних, узята з ОДР, «підходить».

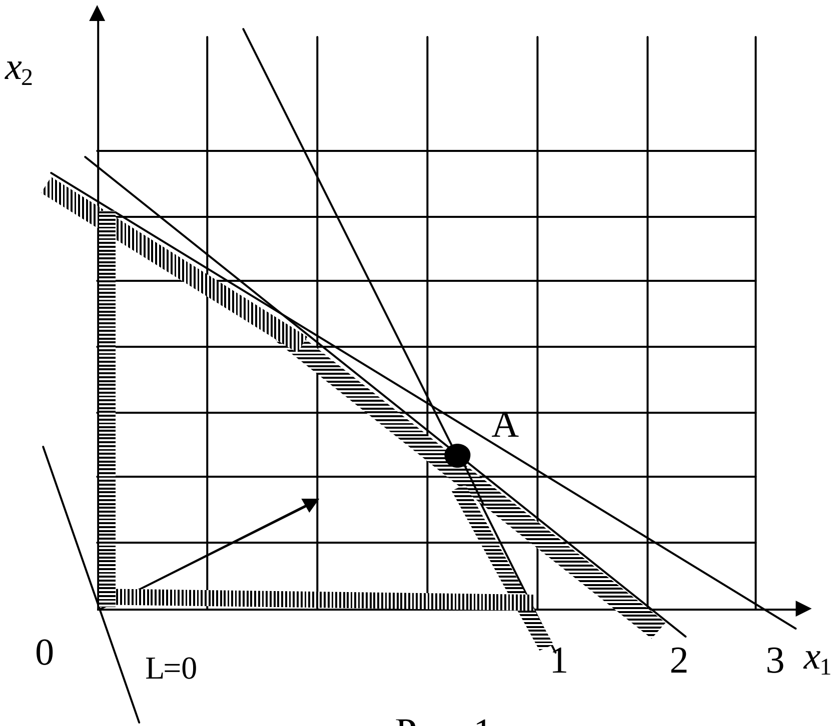

Рис. 1

Очевидно, що цільова функція ***L*** перевертається на максимум в одній з вершин отриманого многокутника. Для визначення цієї вершини геометричним методом побудуємо градієнт цільової функції вектор *grad L = c{6,5}*. Далі побудуємо лінію рівня, що відповідає *L = 0*; вона проходить крізь початок координат і перпендикулярна до вектора *c*. Назвемо її опорною прямою. Нагадаємо, що лінією рівня функції називається множина точок з її області визначення, в яких функція приймає те саме фіксоване значення. Градієнтом функції називається вектор, що вказує напрямок, в якому функція найбільш швидко зростає. Переміщуючи опорну пряму в напрямку вектора *c={6,5}*, бачимо, що найбільш віддаленою вершиною многокутника є вершина ***A***, у якій перетинаються нерівності 1 і 2. Визначимо її координати:

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 \;=\; 440 \\ 3x_1 + 4x_2 \;=\; 393 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 \;=\; 110 - \dfrac{4}{3}\,x_2 \\ 330 - \dfrac{9}{4}\,x_2 + 4\,x_2 = 393 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 \;=\; 110 - 3 * \dfrac{36}{4} = 83 \\ \dfrac{7}{4}\,x_2 = 63, \quad x_2 = 63 * \dfrac{4}{7} = 36 \end{array}\right\}$$

Таким чином, для одержання максимального прибутку необхідно випустити 83 вироби *A* і 36 виробів *B*. Цільова функція при цьому досягне значення

$$\boldsymbol{L_{max} = 6 * 83 + 5 * 36 = 498 + 180 = 678} \textbf{\textit{ грош.од.}}$$

СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

За своєю сутністю симплексний метод являє послідовний перебір кутових точок, при якому значення цільової функції росте від ітерації до ітерації (від однієї кутової точки до іншої). Критерій оптимальності в симплексному методі реалізується шляхом визначення оцінок стовпців матриці A щодо поточного базису (симплекс-різниць). Якщо симплекс-різниці показують неоптимальність плану, здійснюється перехід до наступного базису. При цьому один стовпець виводиться з базису, а інший вводиться. Якщо є кілька стовпців, що мають від'ємні симплекс-різниці, то треба вибирати, який з них вводити у першу чергу.

Для застосування симплексного методу необхідно задачу подати в канонічній формі.

КАНОНІЧНА ФОРМА ЗЛП

Канонічною називається задача лінійного програмування, що перебуває у встановленні *екстремального* значення функції:

$$L = \Sigma c_j x_j \qquad (3)$$

при виконанні умов

$$\Sigma a_{ij} x_{ij} = b_i \quad \text{і} \quad x_j \geq 0. \qquad (4)$$

Будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до форми ***канонічної задачі*** (КЗЛП).

По-перше, не принципово, що треба шукати для цільової функції – максимум або мінімум. Випадок, коли L треба перетворити на максимум, легко зводиться до знаходження мінімуму, якщо змінити знак L на зворотний (мінімізувати не L, а $L' = —L$), тому що

$$min\ f(x_1, x_2,\ldots,x_n) = max[-f(x_1, x_2,\ldots,x_n)]\ldots \qquad (8)$$

і навпаки.

По-друге, від умов-нерівностей можна перейти до умов-рівностей шляхом введення нових «додаткових» змінних. Причому число додаткових змінних дорівнює числу нерівностей.

Приклад 2. Розглянемо умову попереднього прикладу:

Знайти такі x_1 і x_2, що задовольняють нерівностям

$$4x_1+3x_2 \leq 440$$
$$3x_1+4x_2 \leq 393$$
$$3x_1+5x_2 \leq 450$$

і перетворюють на максимум цільову функцію L :

$$L = 6x_1 + 5x_2 \Rightarrow max.$$

Приведемо задачу до канонічної форми. Для цього від системи нерівностей перейдемо до системи рівностей і дістанемо систему обмежень у вигляді рівностей:

$$4x_1+3x_2+x_3 = 440,$$
$$3x_1+4x_2+x_4 = 393,$$
$$3x_1+5x_2+x_5 = 450.$$

Отримана система рівнянь містить три рівності ***(m = 3)*** і п'ять невідомих змінних ***(n = 5)***, тобто $m < n$. Нагадаємо ряд теоретичних положень.

Якщо m рівностей (4) є лінійно незалежними, то систему з m лінійно незалежних рівностей з n змінними ($m < n$) завжди можна розв'язати відносно m змінних, називаних базисними, виразивши їх через інші $k=n-m$ змінних, називаних вільними. Вільним змінним можна надавати будь-які значення, не порушуючи умову (4).

План КЗЛП $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ називається базисним планом задачі, якщо його компоненти, що відповідають базисним стовпцям, більші за нуль ($x_j > 0$), а всі інші компоненти (не базисні) – дорівнюють нулю.

Нагадаємо основні теореми лінійного програмування.

Теорема 1. Якщо цільова функція L приймає максимальне значення в деякій точці ОДР, то вона приймає це значення і в деякій кутовій точці ОДР.

Теорема 2. Кожен припустимий базисний план є кутовою точкою ОДР.

Справедливе й зворотне ствердження: *якщо план $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ є кутовою точкою ОДР, то він є припустимим базисним планом задачі.*

АЛГОРИТМ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДУ

1. Визначити припустимий базисний план.
2. Скласти симплексну таблицю.
3. Перевірити план на оптимальність. Для цього визначити

   $$\mathbf{L_j = \Sigma c_j * \mathit{a}_{ij}} \text{ і оцінки векторів } \mathbf{\Delta_j = L_j - c_j}.$$

   Опорний план оптимальний, якщо всі $\Delta_j \geq 0$, інакше або задача не має розв'язання, або треба перейти до нового опорного плану.
4. Щоб знайти новий опорний план, треба визначити напрямні рядок і стовпець таблиці. До базису вводять вектор, для якого добуток $\Delta_j * \Theta_j$ найбільший за абсолютною величиною, де Θ_j – найменше з відношень вільних членів до позитивних коефіцієнтів вектора, що вводиться до базису:

   $$\Theta = \min (b_i / a_{ij}).$$
5. Визначити коефіцієнти нового опорного плану (коефіцієнти розкладання векторів $\overline{\mathbf{A}}_j$ за векторами нового базису).
6. Перевірити новий опорний план на оптимальність.

Приклад 3. Повернемося до задачі, умову якої приведено до канонічної форми у прикладі 2. Система обмежень задачі являє собою систему з 3 рівнянь (m=3) із 5 невідомими (n=5). Така система має нескінченну множину рішень.

У системі, де m < n, m векторів $\overline{A_j}$ лінійно незалежні. Розв'язання $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, залежне від будь-яких m лінійно незалежних векторів, називається ***базисним розв'язанням системи*** (у нашому випадку базис становлять m = 3 елементи рішення, що не дорівнюють нулю, а інші 2 елементи рішення дорівнюють нулю).

Додатне базисне рішення називається ***опорним планом***.

Очевидно, що одним з рішень системи є

$$x = (0, 0, 440, 393, 450).$$

Такий план відповідає тому, що вироби A і B не випускаються і $L = 0$.

Складемо симплекс-таблицю.

Базис	$C_{баз}$	C_j	6	5	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\leftarrow A_3$	0	440	4	3	1	0	0
A_4	0	393	3	4	0	1	0
A_5	0	450	3	5	0	0	1
		L_j: *0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
		Δ_j	-6	-5	*0*	*0*	*0*

Визначимо $L_j = \Sigma c_j * a_{ij}$.:

$$L_1 = 4*0 + 3*0 + 3*0 = 0;$$

$$L_2 = 3*0 + 4*0 + 5*0 = 0; \ldots\ldots$$

Визначимо $\Delta_j = L_j - c_j$.:

$$\Delta_1 = 0 - 6 = -6;$$

$$\Delta_2 = 0 - 5 = -5;$$

$$\Delta_3 = 0 - 0 = 0 \ldots$$

Оскільки Δ_1 і $\Delta_2 < 0$, план не оптимальний. Перейдемо до нового опорного плану.

Визначимо вектор, який будемо вводити до базису (A_1 або A_2). Це повинен бути вектор, для якого добуток $\Delta_j * \Theta_j$ найбільший.

Знайдемо Θ_j для A_1:

$$\Theta_1 = \min (b_i / a_{ij}) = \min (440/4; 393/3; 450/3) = \min(110; 131; 150) = 110.$$

Визначимо Θ_j для A_2:

$$\Theta_2 = \min (b_i / a_{ij}) = \min (440/3; 393/4; 450/5) = \min(146{,}6; 98{,}2; 90) = 90.$$

Визначимо добутки.

Для A_1 $\Delta_1 * \Theta_1 = 6 * 110 = 660.$ Для A_2 $\Delta_2 * \Theta_2 = = 5 * 90 = 450.$ Найбільший добуток дорівнює 660, таким чином, будемо вводити до базису вектор A_1.

З базису слід виводити вектор, якому відповідає найменше відношення вільних членів до позитивних коефіцієнтів вектора, що вводиться до базису. Для A_1 $\Theta_1 = 110$, що відповідає першому рядку таблиці. Будемо виводити з базису вектор A_3.

Складемо нову симплекс-таблицю.

Базис	$C_{баз}$	C_j	6	5	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	6	110	1	3/4	1/4	0	0
$\leftarrow A_4$	0	63	0	7/4	-3/4	1	0
A_5	0	120	0	11/4	-3/4	0	1
	L_j	660	6	18/4	6/4	0	0
	Δ_j		0	-2/4	6/4	0	0

Вектор, що вводиться до базису, повинен мати коефіцієнти 1, 0 , 0. Для одержання 1 у головному рядку нової таблиці розділимо всі коефіцієнти рядка, який відповідає виведеному вектору $\boldsymbol{A_3}$, на 4. Щоб другий елемент вектора $\boldsymbol{A_1}$ дорівнював 0 (рядок, що відповідає вектору $\boldsymbol{A_4}$, дістаємо з його ж рядка у попередній таблиці), помножимо головний рядок нової таблиці на мінус 3 і додамо до другого рядка попередньої таблиці:

-330	–3	-9/4	-3/4	–0	-0
393	+3	+4	+0	+1	+0
+63	+0	+7/4	-3/4	+1	+0

-330	–3	-9/4	-3/4	–0	-0
450	+3	+5	+0	+0	+1
+120	+0	+11/4	-3/4	+0	+1

Третій рядок нової таблиці дістанемо аналогічно.

Таким чином отримали новий опорний план:

$$\boldsymbol{x = (110; 0; 0; 63; 120),}$$

при якому функція цілі

$$\boldsymbol{L = 6*110 + 5*0 = 660} \text{ – стала більше.}$$

Перевіримо план на оптимальність, для чого знайдемо

$$\boldsymbol{L_j = \Sigma c_j * a_i} \quad \text{і} \quad \boldsymbol{\Delta_j = L_j - c_j}.$$

Оскільки $\boldsymbol{\Delta_2 = -2/4 < 0}$, план не є оптимальним.

Перейдемо до нового опорного плану. Для цього введемо до базису вектор A_2, тому що для нього $\boldsymbol{\Delta_2 = -2/4 < 0}$.

З базису виводимо вектор, якому відповідає найменше відношення вільних членів до позитивних коефіцієнтів вектора $\boldsymbol{A_2}$.

$\boldsymbol{\Theta_1 = \min (b_i / a_{ij}) = \min (110/3; 252/7; 480/11) = \min(146{,}7; 36; 44) = 36.}$

Виводимо вектор $\boldsymbol{A_4}$.

Складемо нову таблицю.

Базис	$C_{баз}$	C_j	*6*	*5*	*0*	*0*	*0*
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	5	36	0	1	-3/7	4/7	0
A_5	0	21	0	0	11/28	-44/28	1
A_1	6	83	1	0	16/28	-12/28	0
	L_j	*678*	*6*	*5*	*9/7*	*2/7*	*0*
	Δ_j		0	0	*9/7*	*2/7*	*0*

Вектор, що вводиться до базису, повинний мати коефіцієнти 1, 0 , 0. Для одержання 1 у головному рядку нової таблиці розділимо всі коефіцієнти рядка, який відповідає виведеному вектору $\boldsymbol{A_4}$ на 7/4. Щоб другий елемент вектора $\boldsymbol{A_2}$ дорівнював 0 (рядок, що відповідає вектору $\boldsymbol{A_5}$, отримуємо з його ж рядка в попередній таблиці), помножимо головний рядок нової таблиці на –11/4 і додамо до третього рядка попередньої таблиці. Для рядка, що відповідає A_1, головний рядок помножимо на мінус ¾:

-99	+0	-11/4	+33/28	–44/28	+0
120	+0	+11/4	-3/4	+0	+1
+21	+0	+0	+11/28	-44/28	+1

-27	+0	-3/4	+9/28	–12/28	+0
110	+1	+3/4	+1/4	+0	+0
+83	+1	+0	16/28	-12/28	+0

Отримано новий опорний план:

$$x = (83; 36; 0; 0; 21),$$

при якому функція цілі $L = 6*83 + 5*36 = 678$ – стала більше. Це свідчить про те, що з кожним кроком ми наближаємося до оптимального рішення, тобто поліпшуємо план.

Перевіримо новий план на оптимальність, визначивши оцінки оптимальності $\boldsymbol{\Delta_j}$.

Всі $\boldsymbol{\Delta_j \geq 0}$, тому отриманий план оптимальний. Функція цілі

$$L_{max} = 678 \text{ грош.од.}$$

Цей дохід є максимальним і може бути отриманий, якщо виготовити 83 вироби ***A*** і 36 виробів ***B*.**

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ EXCEL «ПОШУК РІШЕННЯ»

1. Внести вихідні дані в комірки.
2. Зарезервувати комірки для значень x_1 і x_2.
3. Внести вирази для обмежень, роблячи посилання на клітки x_1 і x_2.
4. Внести вирази цільової функції, роблячи посилання на клітки x_1 і x_2.
5. Установити курсор на клітку цільової функції і в меню ***Сервіс*** знайти функцію ***Пошук рішення.***

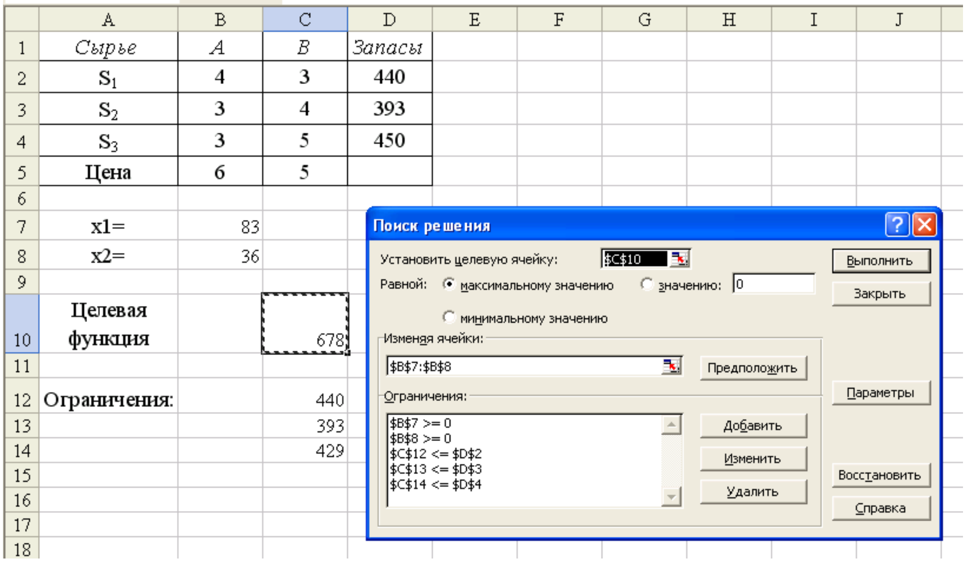

Рис. 2

Призначення реквізитів Діалогового вікна «Пошук рішення»

Встановити цільову комірку - служить для вказівки цільової комірки, значення якої необхідно максимізувати, мінімізувати або встановити рівним заданому числу. Ця комірка повинна містити формулу.

Рівною - служить для вибору варіанта оптимізації значення цільові комірки (максимізація, мінімізація або підбір заданого числа).

Змінюючи комірки - служить для вказівки комірок, значення яких змінюються в процесі пошуку розв'язання доти, поки не будуть виконані накладені обмеження й умова оптимізації значення комірки, зазначеної в полі "Установити цільову комірку".

Припустити - використовується для автоматичного пошуку комірок, що впливають на формулу, посилання на яку наведене у полі „Встановити цільову комірку”. Результат пошуку відображається в полі "Змінюючи комірки".

Обмеження - служить для відображення списку граничних умов поставленої задачі.

ПОБУДОВА ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ

Для побудови двоїстої задачі можна скористуватися властивостями пари сполучених задач:

1. Якщо пряма задача є задачею максимізації, то двоїста буде задачею мінімізації й навпаки.
2. Коефіцієнти цільової функції прямої задачі c_1, $з_2$, ..., c_n стають вільними членами обмежень двоїстої задачі.
3. Вільні члени обмежень прямої задачі b_1, b_2, ..., b_m стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі.
4. Матрицю обмежень двоїстої задачі отримують транспонуванням матриці обмежень прямої задачі.
5. Знаки нерівностей в обмеженнях змінюють на зворотні.
6. Число обмежень прямої задачі дорівнює числу змінних двоїстої задачі, а число обмежень двоїстої задачі дорівнює числу змінних прямої задачі.

Запишемо задачі в матричній формі.

Пряма

Знайти $L(\bar{X}) = max\ \bar{C}^T\ \bar{X}$ при $\bar{\mathbf{A}}\ \bar{\mathbf{X}} \le \bar{\mathbf{P}}_\mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{X}} \ge \mathbf{0}$.

Двоїста

Знайти $L^*(\bar{U}) = min\ \bar{P}_0^T\ \bar{U}$ при $\bar{\mathbf{A}}^\mathbf{T}\ \bar{\mathbf{U}} \ge \bar{\mathbf{C}}$, $\bar{\mathbf{U}} \ge \mathbf{0}$.

Приклад 4. Складемо задачу що є двоїстою до задачі, розглянутої в прикладі 1.

Пряма:

Знайти такі $\boldsymbol{x_1}$ і $\boldsymbol{x_2}$, що перетворюють у максимум цільову функцію $\boldsymbol{L}$

$$\boldsymbol{L = 6x_1 + 5x_2 \Rightarrow max.}$$

і задовольняють обмеженням***:***

$$\boldsymbol{4x_1+3x_2 \le 440}$$
$$\boldsymbol{3x1+4x2 \le 393}$$
$$\boldsymbol{3x_1+5x_2 \le 450.}$$

Двоїста:

Знайти такі $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$ і $\boldsymbol{u_3}$, які перетворюють у мінімум цільову функцію $\boldsymbol{L'}$

$$\boldsymbol{L' = 440*u_1+ 393*u_2 + 450*u_3 \rightarrow min}$$

і задовольняють обмеженням***:***

$$\boldsymbol{4*u_1 + 3*u_2 + 3*u_3 \ge 6}$$
$$\boldsymbol{3*u_1 + 4*u_2 + 5*u_3 \ge 5.}$$

Зв'язок між оптимальними рішеннями прямої і двоїстої задач встановлюють наступні теореми.

<u>Теорема 3.</u> Якщо $\bar{X}_0$ і $\bar{U}_0$ є припустимими розв'язаннями прямої і двоїстої задач, тобто якщо

$$\boldsymbol{\bar{A}\ \bar{X} \le \bar{P}_0} \quad \text{і} \quad \boldsymbol{\bar{A}^T\ \bar{U} \ge \bar{C},}$$

тоді

$$\bar{C}^T\ \bar{X}_0 \le \bar{P}_0^T\ \bar{U}_0\ ,$$

тобто значення цільової функції прямої задачі ніколи не перевищує значення цільової функції двоїстої задачі.

Теорема 4. Якщо $L(\overline{X_0}) = L^*(\overline{U_0})$ для деяких планів $\overline{X_0}$ і $\overline{U_0}$ прямої і двоїстої задач, то $\overline{X_0}$ і $\overline{U_0}$ – оптимальні розв'язки цих задач.

Теорема 5. (Перша теорема подвійності). Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то й інша має оптимальний план і значення цільових функцій рівні між собою

$$L_{max} = L'_{min}.$$

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена (для прямої задачі - зверху, для двоїстої - знизу), то інша задача взагалі не має планів.

Теорема 6. (Друга теорема подвійності). План $X_0 = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n})$ прямої задачі й план $U_0 = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_m})$ двоїстої задачі є оптимальними планами цих задач тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $j = 1,n$ виконується рівність

$$[(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j - b_i) < 0] \rightarrow U_{\text{іопт}} = 0\,,$$

тобто якщо в оптимальному розв'язку прямої задачі якийсь ресурс використовується не повністю, то його "тіньова ціна" дорівнює 0.

Між оптимальними розв'язками прямої і двоїстої задач і елементами індексних рядків симплекс-таблиць (індексний – це рядок, у який записуються значення L_j), що відповідають цим розв'язкам, існує наступний взаємозв'язок:

$$a_{0,n+i}^{ПР} = u_{iOPT}\,, i = \overline{1,m}\,,$$

$$-a_{0,m+j}^{ДВ} = x_{jOPT}\,, j = \overline{1,n}\,,$$

де n – кількість змінних прямої задачі;

m – кількість обмежень прямої задачі;

$a_{0,n+i}^{ПР}$ - $(n+i)$-й елемент прямої задачі;

$a_{0,m+j}^{ДВ}$ - $(m+j)$-й елемент двоїстої задачі.

Скористаємося індексним рядком останньої таблиці й визначимо розв'язок двоїстої задачі. Нагадаємо, що число змінних прямої задачі $n=2$.

Базис	$C_{баз}$	*Cj*	*6*	*5*	*0*	*0*	*0*
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	5	36	0	1	-3/7	4/7	0
A_5	0	21	0	0	11/28	-11/7	1
A_1	6	83	1	0	4/7	-3/7	0
індексний рядок	L_j	*678*	*6*	*5*	*9/7*	*2/7*	*0*
	Δ_j		0	*0*	*9/7*	*2/7*	*0*

Для $u_1 = a_{0,n+1}^{ПР} = a_{0,3}^{ПР} = \frac{9}{7} = 1{,}286$.

Для $u_2 = a_{0,n+2}^{ПР} = a_{0,4}^{ПР} = \frac{2}{7} = 0{,}286$.

Для $u_3 = a_{0,n+3}^{ПР} = a_{0,5}^{ПР} = 0$.

Обчислимо значення функції цілі при оптимальному плані двоїстої задачі

$$L^* = 440*1{,}286 + 393*0{,}286 + 450*0 = 678 \text{ грош.од.}$$

Таким чином, оптимальний план двоїстої задачі

$$U_0 = (1{,}286,\ 0{,}286,\ 0).$$

ЕКОНОМІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ

Як видно з прикладу, ***розв'язання прямої задачі*** дає оптимальний план виготовлення виробів ***A*** і ***B***, а ***розв'язання двоїстої задачі*** – оптимальну систему оцінок сировини, використовуваної для виготовлення цих виробів.

Оптимальним планом є виготовлення 83 виробів ***A*** і 36 виробів ***B***. Визначимо, чи вся сировина витратиться при такому плані:

сировина S_1: 4*83 + 3*36 = 440 - буде витрачена повністю;

сировина S_2: 3*83 + 4*36 = 393 - буде витрачена повністю;

сировина S_3: 3*83 + 5*36 = 429 - не буде витрачена повністю, залишиться ще 21 од.

Змінні $u_1 = 1{,}286$ і $u_2 = 0{,}286$ є умовними двоїстими оцінками одиниці сировини S_1 і S_2 відповідно. Ці оцінки відмінні від нуля, а сировина S_1 і S_2 повністю використовується при оптимальному плані виготовлення виробів ***A*** і ***B***. Двоїста оцінка одиниці сировини S_3=0. Цей вид сировини не використовується повністю при оптимальному плані виробництва.

Таким чином, позитивну двоїсту оцінку мають лише ті види сировини, які повністю використовуються при оптимальному плані виробництва. Тому двоїсті оцінки визначають ***дефіцитність*** використовуваної підприємством сировини.

Величина двоїстої оцінки показує, на скільки зросте максимальне значення цільової функції прямої задачі при збільшенні кількості сировини відповідного виду на одиницю.

Повернемося до прикладу. Збільшення кількості сировини S_1 на 1 одиницю дозволить визначити новий оптимальний план, при якому загальна вартість виготовленої продукції зросте на 1,286 грош.од. і стане рівною

678+1,286 = 679,286 грош.од.

Числа, що стоять у стовпці A_3, показують, що вказане збільшення може бути досягнуте за рахунок збільшення випуску виробів ***A*** на 4/7 одиниці й скорочення випуску виробів ***B*** на 3/7 одиниці. Внаслідок цього витрата сировини S_3 зменшиться на 11/28 одиниці.

Аналогічне збільшення кількості сировини S_2 на 1 одиницю дозволить визначити новий оптимальний план, при якому загальна вартість виготовленої продукції зросте на 0,286 грош.од. і стане рівною

678+0,286 = 678,286 грош.од.

Числа, що стоять у стовпці A_4, показують, що вказане збільшення може бути досягнуте за рахунок збільшення випуску виробів ***B*** на 4/7 одиниці й скорочення випуску виробів ***A*** на 3/7 одиниці. Причому, видаток сировини S_3 зросте на 11/7 одиниць.

Підставивши оптимальні двоїсті оцінки в систему обмежень двоїстої задачі:

4*1,286 + 3*0,286 + 3*0 = 6
3*1,286 + 4*0,286 + 5*0 = 5,

бачимо, що обмеження двоїстої задачі виконуються як строгі рівності. Це означає, що двоїсті оцінки сировини дорівнюють в точності їхнім цінам. Тому випускати ці два види продукції економічно доцільно. (Якщо виконуються нерівності типу >, випуск цих виробів економічно недоцільний).

На підставі другої теореми подвійності (теорема 6):

$$[(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j - b_i) < 0] \rightarrow U_{i\text{опт}} = 0.$$

сформулюємо принцип рентабельності.

Кількість продукції, витрати на виробництво якої перевищують дохід, в оптимальному розв'язанні дорівнює нулю:

$$[(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} U_i - c_j) > 0] \rightarrow x_{j\text{опт}} = 0$$

.

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ДВОЇСТИХ ОЦІНОК

Нехай пряма задача має невироджені опорні плани і хоча б один з них є оптимальним. Очевидно, що оптимальний розв'язок залежить від кількості ресурсів. Будемо розглядати максимальне значення цільової функції як функцію вільних членів системи лінійних рівнянь:

$$Lmax\ (b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Теорема 7. В оптимальному плані двоїстої задачі значення змінної $\boldsymbol{u_i}$ чисельно дорівнює частинній похідній функції $L_{max}\ (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ за відповідним аргументом b_i:

$$\frac{\partial L_{\max}}{\partial b_i} = U_i$$

.

Це означає, що зміна значень величини b_i приведе до збільшення або зменшення $L_{max}\ (b_1, b_2, \ldots, b_m)$... при незмінній $|\boldsymbol{u_i}|$ у відповідному оптимальному плані двоїстої задачі.

Таким чином, якщо знайдено оптимальний план прямої задачі, можна провести аналіз стійкості двоїстих оцінок щодо змін b_i. Це дозволяє оцінити стійкість оптимального плану двоїстої задачі щодо змін обмежень прямої задачі й ступінь впливу зміни b_i на максимальне значення цільової функції, а також визначити найбільш доцільний варіант можливих змін b_i.

План двоїстої задачі не змінюється для всіх значень $b_i + \Delta b_i$, при яких стовпець вектора P_0 останньої симплекс-таблиці не містить від'ємних чисел, тобто коли серед компонентів вектора немає від'ємних.

$$B^* = \begin{vmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_m + \Delta b_m \end{vmatrix}$$

B^* – матриця, зворотна матриці B, укладеної з компонентів векторів базису, який визначає оптимальний план задачі.

Приклад 5. Повернемося до розглянутого прикладу і визначимо інтервали усталеності двоїстих оцінок стосовно зміни кількості ресурсів.

Остання таблиця має вигляд:

Базис	$C_{баз}$	C_j	6	5	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	5	36	0	1	-3/7	4/7	0
A_5	0	21	0	0	11/28	-11/7	1
A_1	6	83	1	0	4/7	-3/7	0
індексний рядок	L_j	*678*	6	5	*9/7*	*2/7*	*0*
	Δ_j		0	*0*	*9/7*	*2/7*	*0*

Визначимо інтервали стійкості двоїстих оцінок. Для ресурсу 1 відповідно до елементів стовпчика A_3 маємо

$$x^* = (83 + 0{,}57\Delta b_1; 36 - 0{,}43\Delta b_1; 0; 0; 21 + 0{,}39\Delta b_1).$$

Запишемо вектор $\overline{B}^*$ з умовами його невід'ємності й визначимо межі припустимих значень Δb_1

$$\overline{B}^* = \begin{vmatrix} 83+0{,}57\Delta b_1 \geq 0 \\ 36-0{,}43\Delta b_1 \geq 0 \\ 21+0{,}39\Delta b_1 \geq 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta b_1 \geq -66{,}7 \\ \Delta b_1 \leq 83{,}7 \\ \Delta b_1 \geq -53{,}8 \end{vmatrix}$$

Оптимальний план двоїстої задачі залишиться незмінним, якщо Δb_1 належить інтервалу $-53{,}8 \leq \Delta b_1 \leq 83{,}7$, а перший ресурс – інтервалу $440 - 53{,}7 \leq b_1 \leq 440 + 83{,}7$ або $386{,}3 \leq b_1 \leq 523{,}7$.

Аналогічно для ресурсу 2 відповідно до елементів стовпчика A_4 запишемо

$$x^* = (83 - 0{,}43\Delta b_2; 36 + 0{,}57\Delta b_2; 0; 0; 21 - 1{,}57\Delta b_2).$$

$$\overline{B}^* = \begin{vmatrix} 83-0{,}43\Delta b_2 \geq 0 \\ 36+0{,}57\Delta b_2 \geq 0 \\ 21-1{,}57\Delta b_2 \geq 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta b_2 \leq 193 \\ \Delta b_2 \geq -63{,}2 \\ \Delta b_2 \leq 13{,}4 \end{vmatrix}$$

Оптимальний план двоїстої задачі залишиться незмінним, якщо Δb_2 належить інтервалу $-63{,}2 \leq \Delta b_2 \leq 13{,}4$, а другий ресурс – інтервалу $393 - 63{,}2 \leq b_2 \leq 393 + 13{,}4$ або $329{,}8 \leq b_2 \leq 406{,}4$.

Таким чином, якщо збільшення кількості ресурсів S_1 належить проміжкові $-53{,}8 < \Delta b_1 < 83{,}7$, а кількість інших ресурсів є незмінною, або збільшення кількості ресурсів S_2 належить проміжкові $-63{,}2 < \Delta b_2 < 83{,}7$, а кількість інших ресурсів є незмінною, то двоїста задача має той самий оптимальний план $u^* = (1{,}286; 0{,}286; 0)$.

Стосовно прямої задачі, можна показати, що при зміні кількості першого ресурсу S_1 у межах $386{,}3 \le b_1 \le 523{,}7$ можливий дохід підприємства лежить у межах *609,7≤L*≤784,3* а оптимальний план прямої задачі

$$(52{,}3;\ 59{,}1;\ 0;\ 0;\ 0{,}02) \le x^* \le (131;\ 0;\ 0;\ 0;\ 53{,}6).$$

При зміні кількості другого ресурсу S_2 у межах $329{,}8 \le b_2 \le 406{,}4$ можливий дохід підприємства лежить у межах *661≤L*≤681,6* а оптимальний план прямої задачі *(110; 0; 0; 0; 53,6)≤x*≤(77; 43,6; 0; 0; 0)*.

Підставивши знайдені значення приростів у вирази похідної від функції цілі, можна визначити її приріст

$$\frac{\partial L_{\max}}{\partial b_i} = U_i ,$$

звідки $\Delta L = u_1 * \Delta b_1 + u_2 * \Delta b_2 + u_3 * \Delta b_3 = 1{,}286 * 83{,}7 + 0{,}286 * 13{,}4 + 0 = 111{,}5$ *грош.од.*

Таким чином, збільшення кількості першого ресурсу на 83,7 одиниці, а другого на 13,4 одиниці призведе до можливості побудови такого плану виробництва продукції, реалізація якого забезпечить випуск виробів на 111,5 грош.од. більше.

Використання функції «Пошук рішення» дозволяє отримати аналіз стійкості.

Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [МУМП.xls]картинка
Отчет создан: 04.10.2006 20:34:23

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
B7	x1= A	83	0	6	0,666666667	2,25
B8	x2= A	36	0	5	3	0,5

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
C12	Ограничения: B	440	1,285714286	440	84	49
C13	B	393	0,285714286	393	13,36363636	63
C14	B	429	0	450	1E+30	21

Рис. 3

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування.- К.: КНЕУ, 2001.
2. Исследование операций в экономике/ Под ред. Н.Ш.Кремера.- М., ЮНИТИ, 2003.
3. Зайченко Ю.П. Исследование операций.- Киев, 1979.
4. Замков О.О. Математические методы в экономике.- М., 2001.
5. Федосеев. Экономико-математические методы и прикладные модели.- Юнити, 2001.
6. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.- М.: Высш. школа,1986. - 244с.
7. Калихман И.Л. Сборник задач по линейной алгебре и программированию.- М.: Высш. школа, 1969.
8. Карманов В.Г. Математическое программирование.- М.: Наука, 1986.
9. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.А., Волощенко А.В. Математическое программирование. - М.:Высш.школа,1980. - 240с.
10. Вентцель Е.С. Исследование операций.- М.: Дрофа, 2004.
11. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике.- СПб.: Питер, 2000.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

При виконанні контрольної роботи необхідно розв’язати задачу лінійного програмування. Для цього треба використати два методи - геометричний і симплексний, далі побудувати двоїсту задачу та знайти її розв’язок, використовуючи для цього останню симплексну таблицю прямої задачі. Пояснити економічний зміст розв’язків пари сполучених задач та визначити межи стійкості оптимального плану.

Завдання. Для виготовлення двох видів виробів ***A*** і ***B*** використовують три види сировини (див. табл.). На виготовлення одиниці виробу ***A*** потрібно витратити сировини першого типу a_1, другого – a_2 і третього - a_3 од. На виготовлення одиниці виробу ***B*** потрібно витратити сировини першого типу b_1, другого - b_2 і третього – b_3 од. Виробництво забезпечене сировиною першого типу в кількості P_1, другого - P_2, третього – P_3.

Варіант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	P_1	P_2	P_3	α	β
1	16	8	5	4	7	9	144	929	362	4	4
2	9	7	4	5	8	16	786	151	862	3	2
3	12	10	3	3	5	6	805	670	930	6	2
4	8	7	4	3	6	9	192	156	187	2	3
5	15	11	9	4	5	10	833	459	714	3	2
6	6	5	3	3	10	12	18	611	303	3	9
7	11	8	5	3	4	3	453	241	622	5	2
8	9	6	3	4	7	8	221	611	428	3	2
9	3	4	3	5	8	11	927	200	941	2	5
10	10	5	4	9	11	15	512	943	89	7	9
11	8	6	3	2	4	3	45	479	949	5	3
12	3	6	8	2	3	2	657	836	530	3	2
13	2	3	3	5	2	3	894	835	412	2	5
14	1	7	6	3	3	3	117	409	65	6	5
15	4	3	3	3	4	5	186	264	494	6	6
16	6	3	2	2	3	3	715	746	928	7	6
17	7	6	1	3	3	2	101	255	170	6	2
18	5	4	3	3	3	4	920	659	618	5	4
19	6	4	3	2	3	4	965	522	567	6	5
20	8	6	3	2	3	2	747	556	372	6	5
21	3	3	2	2	3	5	346	940	484	4	3
22	2	3	3	1	6	7	957	397	599	7	5
23	4	3	2	3	4	6	478	65	888	2	4
24	4	3	3	3	4	5	689	27	814	6	6
25	5	4	6	3	4	15	178	963	223	5	8

Дохід від реалізації одиниці готового виробу ***A*** дорівнює α *грош.од.*, виробу ***B*** - β *грош.од*. Скласти таким план виробництва виробів, що забезпечить найбільший дохід від реалізації.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВОРОНКОВА Тетяна Борисівна,

ВОРОНКОВ Олексій Олександрович

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з курсу «**Математичне програмування**» (для студ. 3 курсу заочної форми навчання та другої вищої освіти ФПО та ЗН напряму підготовки 0502 (6.030601) «Менеджмент» спеціальності «Менеджмент організацій», спеціалізації «Інформаційні системи в менеджменті»)

Редактор *М.З. Аляб'єв*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2010, поз. 506М

Підп. до друку 09.03.10 Формат 60х84 1/16

Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 0,9

Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:

Харківська національна академія міського господарства,

вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №731 від 19.12.2001